

EJERCICIO 1

Números y Álgebra: Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A - I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Para despejar la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, debemos aplicar algunas propiedades de las matrices y utilizar la información proporcionada.

Dado que $XA = A + XB$, podemos reescribir la ecuación como:

$$XA - XB = A$$

Factorizando X , obtenemos:

$$X(A - B) = A$$

Ahora, como se nos indica que $A - B$ es invertible, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el inverso de $(A - B)$. Por lo tanto, la ecuación se convierte en:

$$X = A(A - B)^{-1}$$

Ahora, sustituyendo los valores de A y B dados:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - (A - I)^{-1}$$

Calculamos $A - B$:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dado que $A - B$ es invertible, su inversa existe. Para calcularla, aplicamos la fórmula de inversa de una matriz 2×2 :

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{\det(A - B)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\det(A - B)$ es el determinante de la matriz $(A - B)$. Calculamos el determinante:

$$\det(A - B) = (-1) \cdot (-1) - (1) \cdot (0) = 1$$

Por lo tanto, la inversa de $(A - B)$ es:

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, sustituimos en la ecuación para encontrar X :

$$X = A(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz X es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 4

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. Nota: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

Para calcular el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$, y $y \geq f(x)$, donde $f(x) = x \ln x$, debemos encontrar los puntos de intersección de las curvas y luego calcular el área bajo la curva $y = f(x)$ que se encuentra dentro de los límites de las desigualdades.

Primero, encontraremos los puntos de intersección de las curvas $y = x$ y $y = f(x)$: $y = x$
 $y = x \ln x$

Igualando estas dos ecuaciones, tenemos:

$$x = x \ln x$$

Dividiendo ambos lados por x (si $x \neq 0$), obtenemos:

$$1 = \ln x$$

Aplicando la función exponencial en ambos lados, obtenemos:

$$e = x$$

Por lo tanto, el punto de intersección es (e, e) .

A continuación, evaluaremos las desigualdades en los límites de interés:

Para $x = 1$:

$$y \leq 1 \text{ (segunda desigualdad)}$$

$$y \geq 1 \ln 1 = 0 \text{ (tercera desigualdad)}$$

Para $x = e$:

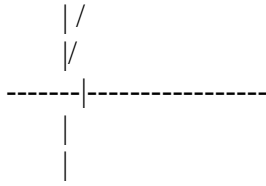
$$y \leq e \text{ (segunda desigualdad)}$$

$$y \geq e \ln e = e \text{ (tercera desigualdad)}$$

Ahora, esbozaremos el gráfico de las desigualdades y la curva $y = f(x) = x \ln x$:

lua

Copy code



La línea recta $y = x$ pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene una pendiente de 1. La curva $y = x \ln x$ pasa por el punto (e, e) y se curva hacia arriba a medida que x aumenta.

El área de la región se encuentra debajo de la curva $y = x \ln x$ y entre los límites $x = 1$ y $x = e$. Para calcular el área, podemos integrar la función $f(x) = x \ln x$ en este intervalo:

$$\text{Área} = \int [1, e] x \ln x \, dx$$

Sin embargo, la integración de esta función no se puede realizar de manera directa, por lo que necesitaremos utilizar técnicas de integración por partes. El cálculo detallado de esta integral puede ser complejo y extenso.

En resumen, para calcular el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$, y $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$, se requiere la evaluación de una integral que no es sencilla de calcular de manera directa.

EJERCICIO 5

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $u \vec{v} (1, 0, -1)$ y $v (2, 1, -2)$. b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: x - 2 = y + 1 = z$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

a) Para obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$, podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} r: x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

Donde (x_0, y_0, z_0) es un punto en la recta y (a, b, c) son las direcciones de la recta.

Calculamos las direcciones de la recta restando las coordenadas correspondientes de los puntos:

$$\text{Dirección: } d \vec{v} = Q - P = (3, 0, 0) - (2, -1, 0) = (1, 1, 0)$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$\begin{aligned} r: x &= 2 + t \\ y &= -1 + t \end{aligned}$$

$$z = 0$$

A continuación, para encontrar la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $u^{\vec{}}(1, 0, -1)$ y $v^{\vec{}}(2, 1, -2)$, podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\pi: n^{\vec{}} \cdot (r - R) = 0$$

Donde $n^{\vec{}}$ es un vector normal al plano y r es un punto genérico del plano.

Calculamos el vector normal $n^{\vec{}}$ tomando el producto cruz entre los vectores $u^{\vec{}}$ y $v^{\vec{}}$:

$$n^{\vec{}} = u^{\vec{}} \times v^{\vec{}} = (1, 0, -1) \times (2, 1, -2) = (-1, 0, -1)$$

Sustituyendo el punto $R(0, 4, -2)$ y el vector normal $n^{\vec{}}$ en la ecuación del plano, obtenemos:

$$\begin{aligned} n^{\vec{}} \cdot (r - R) &= 0 \\ (-1, 0, -1) \cdot (x, y, z) - (-1, 0, -1) \cdot (0, 4, -2) &= 0 \\ -x - z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación implícita o general del plano π es:

$$x + z - 2 = 0$$

b) Para calcular el ángulo agudo que forma la recta $r: x - 2/1 = y + 1/1 = z/0$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$, podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\cos(\theta) = |n^{\vec{}} \cdot d^{\vec{}}| / (|$$

EJERCICIO 8

8. Estadística y Probabilidad: a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

En este caso, podemos utilizar la distribución binomial para calcular la probabilidad de que al menos 55 de los 2500 renacuajos lleguen a ranas adultas.

La probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%, lo que equivale a una probabilidad de éxito (p) de 0.02. La probabilidad de que un renacuajo no llegue a rana adulta es de $1 - 0.02 = 0.98$, que es la probabilidad de fracaso (q).

La probabilidad de que al menos 55 de los 2500 renacuajos lleguen a ranas adultas se puede calcular utilizando la distribución binomial acumulada. Podemos utilizar una calculadora estadística o software estadístico para obtener el resultado.

La probabilidad de que al menos 55 renacuajos lleguen a ranas adultas se puede calcular de la siguiente manera:

$$P(X \geq 55) = 1 - P(X < 55)$$

Donde X sigue una distribución binomial con parámetros $n = 2500$ (número de renacuajos) y $p = 0.02$ (probabilidad de éxito).

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

En este caso, se nos dice que la puntuación de los solicitantes sigue una distribución normal con media 100 y desviación estándar 20. Se desea obtener la puntuación necesaria para estar en el 5% superior de los solicitantes.

Dado que la distribución es normal, podemos utilizar la tabla de la distribución normal estándar (Z) o una calculadora estadística para encontrar el percentil correspondiente al 5% superior de la distribución.

El percentil 5% superior corresponde al percentil 95%. Buscamos el valor Z en la tabla o calculamos el valor Z utilizando la fórmula $Z = (X - \mu) / \sigma$, donde X es la puntuación deseada, μ es la media (100) y σ es la desviación estándar (20).

En la tabla o calculadora, buscamos el valor Z que acumula el 95% de la distribución. Una vez obtenido el valor Z , podemos despejar la ecuación para obtener la puntuación necesaria (X):

$$Z = (X - \mu) / \sigma$$

Despejando X :

$$X = Z * \sigma + \mu$$

Sustituyendo los valores $\mu = 100$, $\sigma = 20$ y el valor Z obtenido, podemos calcular la puntuación necesaria para obtener la beca.